مثال :

$$\Theta : S \longrightarrow [0,a] \times [a,1]$$

$$\Theta(x) = (x \wedge a, x \vee a)$$

أثبت أنه غامر :

الحل : ليكن $(y,z) \in [0,a] \times [a,1]$

$$y \leq a \;,\; z \geq a$$

لنبين أنه يمكن استبدال العنصر x بـ $y \vee (z \wedge a')$

$$\Theta(x) = (y,z)$$

$$[y \vee (z \wedge a')] \wedge a = [(y \vee z) \wedge (y \vee a') \wedge a]$$

توزيع

$$= (y \vee z) \wedge (y \wedge a) = y \wedge (y \vee z) = y$$

حسب خاصة الامتصاص

$$[y \vee (z \wedge a')] \vee a = y \vee [(z \wedge a') \vee a] =$$

$$= y \vee [(z \vee a) \wedge (a' \vee a)] = y \vee (z \vee a)$$

$$= (y \vee z) \vee a = z$$

وبالتالي فإن Θ هي غامرة .

الفصل الثالث :

الجبر البولياني (جبر بول) :

جبر بول هو بنية مكونة من مجموعة وثلاث عمليات تتوفر فيها مواصفات معينة تجعل من هذه البنية حلقة تبديلية واحدية شبكة متممات بآن واحد ويمكن للمجموعة أن تكون منتهية وغير منتهية ، مجموعة القوة $P(E)$ لمجموعة E مكونة من n عنصراً تشكل تحت العمليات الأساسية على المجموعات وهي الاتحاد والتقاطع والمتمم تشكل جبر بول وهذا الجبر مكون من 2^n عنصراً كما يمكن لمجموعة جبر بول أن تكون مكونة من عنصرين فقط .

إن تصميم أجهزة الحاسبات الآلية وطرق تنفيذ البرامج داخل هذه الأجهزة والمنطق

اللازم لكتابة هذه البرامج تعتمد جميعاً في الاساس على جبر بول مكون من عنصرين هما (0 و 1) وثلاث عمليات :

فالقاطع في الجهاز له حالتان وهما الوصل والفصل .

وعندما كتب جورج بول عن الجبر الذي يحمل اسمه فقد كان يقصد تقديم أساس جبري للمنطق الذي كان يدرسه في جامعة الملكة ببريطانيا وبعد مئة عام سيصبح ما قدمه علماء أساس النظري في تصميم الدارات الالكترونية وبالتالي تصميم أجهزة الحاسب

بعض حلقات بول :

مبرهنة :

لتكن $(E, \vee, \wedge, ')$ شبكة بول (شبكة بوليانية) . وإذا عرفنا على عناصر المجموعة E العمليتين + و . (جمع وضرب) كما يلي :

$$x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)$$

$$x.y = x\wedge y$$

عندها نجد أن : $(E, +, .)$ تشكل حلقة تبديلية وواحدية تحقق عناصرها الشرط :

$$x.x = x^2 = x$$

الإثبات :

أولاً أن عملية الجمع المعرفة بالشكل السابق هي عملية معروفة جيداً كما أنها في شبكة المجموعات الجزئية $P(E)$ تمثل عملية الفرق التناظري :

$$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$$
$$=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$$

ويمكننا أن نكتب :

$$x+y = (x\vee y)\wedge(x\wedge y)'$$

$$\Rightarrow (x+y)' = (x\wedge y)\vee(x'\wedge y')$$

1- إن عملية الجمع هي عملية تجميعية :

$$x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)$$

٢- الخاصة التجميعية بالنسبة للجمع

$$(x+y)+z=[(x+y)\wedge z']\vee[(x+y)'\wedge z]$$

$$=[((x\wedge y')\vee(x'\wedge y))\wedge z']\vee[((x\wedge y)\vee(x'\wedge y'))\wedge z]$$

$$=[(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')]\vee[(x\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z)]$$

$$=(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z)$$

وبما أن الطرف الأخير في هذه العبارة لا يتغير إذا بادلنا بين x و z نستطيع أن نثبت أن :

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

وبالتالي عملية الجمع هي عملية تجميعية .

٣- العنصر المحايد :

إن العنصر ~~صفر~~ صفر هو العنصر المحايد للجمع وذلك لأن :

$$x+0=(x\wedge 0')\vee(x'\wedge 0)$$
$$=x\vee 0=x$$

٤- لكل عنصر $x\in E$ نظير بالنسبة للجمع هو العنصر x نفسه وذلك لأن :

$$x+x=(x\wedge x')\vee(x'\wedge x)=0\vee 0=0$$

من ١ و ٢ و ٣ و ٤ نستنتج أن $(E,+)$ زمرة تبديلية .

ثانياً :

الضرب تجميعي لأن :

$$\forall x,y,z\in E\Rightarrow$$
$$(x\cdot y)\cdot z=(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)=x\cdot(y\cdot z)$$

- يوجد عنصر محايد بالنسبة للضرب هو (1) وذلك لأن:

$$x.1 = x \wedge 1 = x$$

- الضرب تبديلي:

$$x.y = x \wedge y = y \wedge x = y.x$$

ثالثاً: الضرب يقبل التوزيع على الجمع.

$$x.(y+z) = x \wedge [(y \wedge z') \vee (y' \wedge z)]$$

$$= (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z)$$

وبنفس الطريقة نستطيع إثبات أن:

$$x.y + x.z = (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z)$$

ومن خلال ما سبق نستطيع القول أن $(E,+,.)$ هي حلقة تبديلية وواحدية.

من خلال ما سبق والتعرف على حلقة بول:

تعريف:

إن كل حلقة واحدية $(E,+,.)$ عناصرها تحقق المطابقة

$$x^2 = x.x = x$$

تسمى حلقة بول وأيضاً تحقق:

$$x + x = 0$$

$$2x = 0$$

$$(x+x)^2 = (x+x)(x+x)$$

$$= x^2 + x^2 + x^2 + x^2$$

$$= \underbrace{x+x}_{0} + \underbrace{x+x}_{0} = 0$$

ينتج من ذلك أن كل عنصر هو نظير نفسه وأيضاً هي حلقة تبديلية.

مبرهنة:

لتكن $(E,+,.)$ حلقة بول وإذا ما عرفنا على E الاتحاد والتقاطع كما يلي:

$$x \vee y = x + y + x.y$$

$$x \wedge y = x.y$$

عندئذ فان $(E, \leq, \vee, \wedge)$ تشكل شبكة بول (بوليانية).

تعريف الجبر البولياني:
هو بنية جبرية مكونة من ثلاث عمليات ثنائيتان هما الجمع والضرب وعملية احادية هي المتمم وتحوي العنصرين (0 و 1) بحيث ونرمز لها $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ بحيث تتحقق المبادئ الخمسة الآتية:

1- العمليتان التبديليتان: $x \cdot y = y \cdot x$, $y + x = y + x$

2- العمليتان التجميعيتان:
$$(x+y)+z = x+(y+z)$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

3- توزيعيتان:
$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$
$$x + y \cdot z = (x+y)(x+z)$$

4- المحايدات:
(0) هو المحايد بالنسبة للجمع و (1) المحايد بالنسبة للضرب.
$$x + 0 = x$$
$$x \cdot 1 = x$$

5- لكل عنصر $x \in B$ يوجد متمم هو $x' \in B$
$$x + x' = 1$$
$$x \cdot x' = 0$$

أمثلة (1)- $P(E)$ يشكل جبر بول.
$$(P(E), \vee, \wedge, ', \phi, E)$$

(2)- هل $(D(30), +, \cdot, ', 0, 1)$ و $D(42)$, $D(24)$ و $D(12)$
هل هي جبر بول.
$D(30)$, $D(42)$ و $D(6)$ هي جبر بول.
و $D(12)$ و $D(24)$ ليست جبر بول.

(3)- $D(n)$ متى يكون جبراً بوليانياً: حيث $\forall n \in N$

بالشكل توجد ...

امثلة: ان $D(n)$ هي شبكة جزئية بالنسبة للشبكة التوزيعية $(N, \leq, \vee, \wedge)$

$$x \wedge y = \gcd(x,y)$$
$$x \vee y = \operatorname{lcm}(x,y)$$

إن $D(n)$ هي شبكة توزيعية تحتوي العنصرين 1 والأكبر n ولكنها ليست بوليانية في الحالة العامة لنبحث عن الشرط الذي يجب أن يتوفر بالعدد n حتى تكون $D(n)$ هي شبكة متممة وبالتالي شبكة بول وإذا كان x هو احد قواسم n فإن x' يجب أن يحقق الشرطية:

$$\gcd(x,x') = 1$$

$$\operatorname{lcm}(x,x') = \frac{x \cdot x'}{\gcd(x,x')} = n \Rightarrow x' = \frac{n}{x}$$

إذاً $D(n)$ شبكة بول إذا وفقط إذا كان $\frac{n}{x}$ و x أوليان فيما بينهما.

وإذا كان $\frac{n}{x}$ و x غير أوليين نسبياً فيوجد عدد أولي p بحيث يكون $x = ap$

و $n = b \cdot p^2$ حيث أن n يقبل القسمة على مربع عدد أولي،

من هنا يمكننا القول أن $D(n)$ هي شبكة بول إذا وفقط إذا كان n لا يقبل القسمة على مربع عدد أولي اي أن:

n هو من الشكل:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$$

حيث p_i أعداد أولية و $p_i \neq p_j$ إذا كان $i \neq j$

فإذا توفر هذا الشرط على العدد n وعرفنا على n العمليتين الثنائيتين الضرب والجمع والمتمم

$$x + y = \gcd\left(\operatorname{lcm}(x,y), \operatorname{lcm}\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right)\right)$$

$$x \cdot y = \gcd(x,y)$$
$$x' = \frac{n}{x}$$

فإن:

$$(D(n), +, \cdot, ', 0, 1)$$

وكانت n لا تقبل القسمة على مربع عدد أولي فإن $D(n)$ هي جبر بول،

ومن الجبور المعروفة لدينا $D(12)$، $D(6)$، $D(30)$، $D(42)$ ،

اما الأعداد التي تشكل قواسمها مربع عدد أولي فإنها لا تشكل جبور

مثل $D(12)$ ، $D(24)$

مثال :

لتكن لدينا المجموعة المعرفة من العناصر $\{0,1\}$ تحت عملية الجمع والضرب والمتمم الموضحة بالجداول التالية .

+	0	1
0	0	1
1	1	1

جمع

.	0	1
0	0	0
1	0	1

ضرب

x	x'
0	1
1	0

متمم .

عندها اثبت أن $(B, +, ., ', 0, 1)$ تشكل جبراً بوليانياً :

الحل :

نلاحظ من الجدول الأول أن

$$a+b = \max(a,b)$$

$$a.b = \min(a,b)$$

ومن النظر الى الجداول نجد أن المبادئ الخمسة الواردة في تعريف جبر بول محققة .

وعلى سبيل المثال :

$$a+b.c = (a+b)(a+c)$$

$$= 8$$

$a+b.c$	$(a+b)(a+c)$
$0+0.0 = 0+0 = 0$	$(0+0)(0+0) = 0.0 = 0$
$0+0.1 = 0+0 = 0$	$(0+0)(0+1) = 0.1 = 0$
$1+1.1 = 1+1 = 2$	$(1+1)(1+1) = 1.1 = 1$

وبنفس الطريقة

$$a(b+c) = a.b + a.c$$

وبذلك فعلاً $(B, +, ., ', 0, 1)$ تشكل جبر بولياني وله

ولكل عنصر متمم حيث أن متممه هو الواحد ومتمم الواحد هو الصفر .

انتهت المحاضرة